

## 1 Boules et normes

### Exercice 1 ★ Translatée d'une boule –

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $x, y \in E$ . Démontrer que  $x + \bar{B}(y, r) = \bar{B}(x + y, r)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1462]

### Exercice 2 ★ Inégalités sur les normes –

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $x, y, z, t$  des éléments de  $E$ . Démontrer que

$$\|x - y\| + \|z - t\| \leq \|x - z\| + \|y - t\| + \|x - t\| + \|y - z\|.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3284]

### Exercice 3 ★ Inégalités sur les normes –

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que, pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante 2 peut elle être améliorée ?

2. On suppose désormais que la norme est issue d'un produit scalaire. Démontrer que, pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

En déduire que

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2} \max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

La constante  $\sqrt{2}$  peut elle être améliorée ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1465]

### Exercice 4 ★★★★★ Boules égales –

Montrer que si deux boules  $\bar{B}(a, r)$  et  $\bar{B}(a', r')$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ ,  $E \neq \{0\}$ , sont égales, alors  $a = a'$  et  $r = r'$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1461]

### Exercice 5 ★★★★★ Oh les boules ! –

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Pour  $a \in E$  et  $r > 0$ , on note  $\bar{B}(a, r)$  la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ . On fixe  $a, b \in E$  et  $r, s > 0$ .

1. On suppose que  $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$ . Démontrer que  $\|a - b\| \leq s - r$ .

2. On suppose que  $\bar{B}(a, r) \cap \bar{B}(b, s) = \emptyset$ . Montrer que  $\|a - b\| > r + s$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1467]

### Exercice 6 ★★★★★ Norme invariante par conjugaison –

1. Donner un exemple de matrice  $A$  non-nulle de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui soit semblable à  $2A$ .

2. Existe-t-il sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une norme  $\|\cdot\|$  telle que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ , on a  $\|PAP^{-1}\| = \|A\|$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1466]

## 2 Exemples de normes

### Exercice 7 ★ CNS pour avoir une norme –

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels et  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les  $a_k$  pour que  $N$  soit une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1474]

### Exercice 8 ★ Sup de deux normes –

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur un espace vectoriel  $E$ . On pose  $N = \max(N_1, N_2)$ . Démontrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1472]

### Exercice 9 ★★ Condition nécessaire et suffisante pour avoir une norme –

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Pour  $x \in E$ , on pose  $N(x) = \|f(x)\|$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur  $f$  pour que  $N$  soit une norme sur  $E$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3282]

### Exercice 10 ★★ Norme 2 "perturbée" –

Soit  $a, b > 0$ . On pose, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$ .

1. Prouver que  $N$  est une norme.
2. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit nombre  $p > 0$  tel que  $N \leq p\|\cdot\|_2$  et le plus grand nombre  $q$  tel que  $q\|\cdot\|_2 \leq N$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1473]

### Exercice 11 ★★ Espace de matrices –

On définit une application sur  $\mathcal{M}_n()$  en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur  $\mathcal{M}_n()$ , puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n().$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1470]

### Exercice 12 ★★ Norme non issue d'un produit scalaire –

Montrer que, pour  $n \geq 2$ , les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas issues d'un produit scalaire.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3283]

### Exercice 13 ★★★ Avec une racine carrée –

Pour tout  $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2}.$$

Démontrer que  $N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1464]

### Exercice 14 ★★★★★ Sup sur les polynômes –

Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions  $A$  doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur  $\mathbb{R}[X]$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1463]

### Exercice 15 ★★★★★ Inégalités de Hölder et de Minkowski –

Soit  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $p, q \in [1, +\infty[$  tels que  $1/p + 1/q = 1$ , et  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$   $2n$  réels strictement positifs.

1. Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

2. On suppose dans cette question que  $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$ . Montrer que  $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$ .

3. En déduire la splendide inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

4. On suppose en outre que  $p > 1$ . Déduire de l'inégalité de Hölder l'inégalité de Minkowski :

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}.$$

5. On définit pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Démontrer que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[609]

## 3 Normes équivalentes

### Exercice 16 ★★ Normes classiques sur les polynômes –

Soit  $E = [X]$  l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur  $E$  trois normes par, si  $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$  :

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|, \quad N_2(P) = \left( \sum_{i=0}^p |a_i|^2 \right)^{1/2}, \quad N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur  $[X]$ . Sont-elles équivalentes deux à deux ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1471]

### Exercice 17 ★ Normes classiques sur les fonctions continues –

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . On définit les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left( \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1478]

---

**Exercice 18** ★ **Un exemple simple de deux normes équivalentes –**

---

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  et  $N_1, N_2$  les applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définies respectivement, pour tout  $f \in E$ , par

$$N_1(f) = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt$$
$$N_2(f) = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $E$ , puis qu'elles sont équivalentes.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[3285]

---

**Exercice 19** ★★ **Suites et polynômes –**

---

Sur  $E = \mathbb{R}[X]$ , on définit  $N_1$  et  $N_2$  par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $E$ .
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite  $(P_n)$  définie par  $P_n = \frac{1}{n}X^n$ .
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[1481]

---

**Exercice 20** ★★★ **Deux normes équivalentes sur  $\mathcal{C}^1$  –**

---

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ . On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que  $N$  et  $N'$  sont deux normes sur  $E$ .
2. Démontrer que  $N$  et  $N'$  sont équivalentes.
3. Sont-elles équivalentes à  $\|\cdot\|_\infty$  ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[1479]

---

**Exercice 21** ★★★★★ **Normes sur les polynômes –**

---

Soit  $a \geq 0$ . Pour  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

1. Démontrer que  $N_a$  est une norme sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Soit  $a, b \geq 0$  avec  $a < b$  et  $b > 1$ . Démontrer que  $N_a$  et  $N_b$  ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si  $(a, b) \in [0, 1]^2$ , alors  $N_a$  et  $N_b$  sont équivalentes.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[1480]

---

**Exercice 22** ★★★★★ **Norme intégrale sur les fonctions  $C^1$ . –**

---

Soit  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose

$$N(f) = \left( f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .
2. Démontrer que, pour tout  $f \in E$ ,  $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$ .

3. Les deux normes  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont-elles équivalentes ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1483]

---

**Exercice 23** ★★★★★ **Une norme ? –**

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f, g \in E$ , on pose  $N_g(f) = \|gf\|_\infty$ .

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $g$  pour que  $N_g$  soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $g$  pour que  $N_g$  soit équivalente à la norme infinie.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1482]

## 4 Suites dans un evn

---

**Exercice 24** ★ **Suites extraites et coordonnées –**

Une suite  $(u_n)$  de  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$  telle que chacune des suites composantes admet une valeur d'adhérence admet-elle une valeur d'adhérence ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1485]

---

**Exercice 25** ★★ **Suites extraites - pour bien comprendre... –**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

1. Parmi les suites ci-dessous, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3 \cdot 2^n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{3 \cdot 2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}.$$

2. Soit  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer que toute suite extraite de  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[110]

---

**Exercice 26** ★★ **Convergence des suites extraites –**

Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels.

1. On suppose que  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite. Prouver que  $(u_n)$  est convergente.
2. Donner un exemple de suite telle que  $(u_{2n})$  converge,  $(u_{2n+1})$  converge, mais  $(u_n)$  n'est pas convergente.
3. On suppose que les suites  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  sont convergentes. Prouver que  $(u_n)$  est convergente.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[111]

---

**Exercice 27** ★★ **Suites extraites vérifiant certaines propriétés –**

Soit  $(u_n)$  une suite de nombre réels.

1. On suppose que  $(u_n)$  est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de  $(u_n)$  ?
2. On suppose que  $(u_n)$  est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de  $(u_n)$  ?
3. On suppose que  $(u_n)$  n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[112]

---

**Exercice 28** ★ **Exemples de valeurs d'adhérence –**

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite  $(-1)^n$  ? de la suite  $\cos(n\pi/3)$  ?
2. Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1490]

---

**Exercice 29** ★★★★★ –

Soit  $(u_n)$  une suite bornée de nombre réels. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$x_n = \inf\{u_p; p \geq n\} \text{ et } y_n = \sup\{u_p; p \geq n\}.$$

1. Pourquoi les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont-elles bien définies ?

2. Déterminer les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  dans les cas suivants :

$$\text{a. } u_n = (-1)^n \quad \text{b. } u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3. Démontrer que  $(x_n)$  est croissante, que  $(y_n)$  est décroissante. En déduire que ces deux suites sont convergentes. On notera  $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  et  $\beta = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ .

4. Démontrer que  $\alpha \leq \beta$ .

5. Démontrer que si  $\alpha = \beta$ , alors la suite  $(u_n)$  converge.

6. Démontrer que si  $(u_n)$  admet une sous-suite convergeant vers un réel  $\ell$ , alors  $\alpha \leq \ell \leq \beta$ .

7. Démontrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $p \geq n$  tel que

$$y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n.$$

8. Démontrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $p_0 \in \mathbb{N}$ , il existe  $p \geq p_0$  tel que

$$\beta - 2\varepsilon \leq u_p \leq \beta + 2\varepsilon.$$

9. En déduire qu'il existe une sous-suite de  $(u_n)$  qui converge vers  $\beta$ .

10. Quel théorème vient-on de redémontrer ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[809]

---

### Exercice 30 Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel –

1. Montrer qu'une suite  $(u_n)$  de réels ne tend pas vers  $+\infty$  si et seulement si on peut en extraire une suite majorée.

2. Montrer que, de toute suite  $(q_n)$  d'entiers naturels qui ne tend pas vers  $+\infty$ , on peut extraire une suite constante.

3. Soit  $x$  un irrationnel et  $(r_n)$  une suite de rationnels convergeant vers  $x$ . Pour tout entier  $n$ , on écrit  $r_n = \frac{p_n}{q_n}$  avec  $p_n \in \mathbb{Z}$  et  $q_n \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que  $(q_n)$  tend vers  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1484]

---

### Exercice 31 Suites de Cauchy –

Une suite  $(u_n)$  de nombre réels est appelée suite de Cauchy si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $p, q \geq N$ , on a

$$|u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

2. On souhaite prouver la réciproque à la question précédente. Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy.

Montrer que  $(u_n)$  est bornée. On suppose que  $(u_n)$  admet une suite extraite convergente. Montrer que  $(u_n)$  est convergente. Conclure.

3. Montrer que  $(u_n)$  est bornée.

4. On suppose que  $(u_n)$  admet une suite extraite convergente. Montrer que  $(u_n)$  est convergente.

5. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[114]

---

### Exercice 32 Valeurs d'adhérence d'une suite dont les différences tendent vers zéro –

1. Soit  $u$  une suite réelle telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ . Démontrer que l'ensemble  $\text{Vad}(u)$  des valeurs d'adhérence de  $u$  est un intervalle.

2. Application : soit  $f$  une fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  et  $u$  une suite définie par  $u_0 \in [a, b]$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Démontrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1488]

**Exercice 33** ★★★★★ **Valeurs d'adhérence de la suite  $\cos(n)$  –**

Pour cet exercice, on rappelle que  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . On fixe  $a \in ]-1, 1]$  et  $\varepsilon > 0$  tel que  $a - \varepsilon \geq -1$ .

1. Démontrer qu'il existe au moins un entier  $n \geq 0$  tel que  $\cos(n) \in ]a - \varepsilon, a[$ .
2. En déduire qu'il existe une infinité d'entiers  $n \geq 0$  tels que  $\cos(n) \in ]a - \varepsilon, a[$ .
3. Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos(n))$  ?

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[1489]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Procéder par double inclusion !

---

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Majorer  $\|x - y\|$  et  $\|z - t\|$  en utilisant l'inégalité triangulaire. Il y a deux choix possibles pour chacun. Utiliser les deux, et diviser par deux à la fin !

---

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

1. Décomposer  $x$  en fonction de  $x + y$  et de  $x - y$ . Trouver un contre exemple pour  $\mathbb{R}^2$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ .
  2. Développer  $\|x + y\|^2$  et  $\|x - y\|^2$ .
- 

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Démontrer d'abord que si  $a = a'$ , on a forcément  $r = r'$ . Traiter ensuite le cas  $a \neq a'$ . Un dessin est nécessaire !

---

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Faire un dessin. Pour le 1., considérer le point de  $\bar{B}(a, r)$  le plus éloigné de  $b$ . Pour le 2., considérer le point de  $\bar{B}(a, r)$  le plus proche de  $b$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Pour la première question, recherche une matrice nilpotente...

---

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Que sait-on sur  $N(e_k)$  ?

---

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Le point délicat est de savoir à quelle condition  $N(x) = 0 \implies x = 0$ . On pourra réfléchir à la condition portant sur  $f$  pour que  $f(x) = 0 \iff x = 0$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

1. Pour l'inégalité triangulaire, appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ou bien remarquer que la norme est issue d'un produit scalaire.
  2. C'est une boule ellipsoïdale...
  3. L'un est  $\min(a, b)$ , l'autre est  $\max(a, b)$ .
- 

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

La démonstration du fait qu'il s'agit d'une norme est une simple modification du cas classique de la norme infinie dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour obtenir le fait qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, écrire  $C = AB$ , prendre un coefficient quelconque de  $C$ , l'écrire en fonction des coordonnées de  $A$  et  $B$ , et majorer.

---

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Faire un raisonnement par l'absurde : si  $\|\cdot\|_1$  est issue d'un produit scalaire  $\varphi_1$ , alors on peut calculer  $\varphi_1(x, y)$  en fonction de  $\|\cdot\|_1$  par la formule de polarisation. Appliquer ceci pour des valeurs bien choisies (et simples) de  $x$  et  $y$  pour arriver à une contradiction (par exemple, pour prouver que  $\varphi_1$  n'est pas bilinéaire).

---



---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Démontrer que  $N$  est issue d'un produit scalaire.

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

Quelle condition sur  $A$  entraîne que  $\|P\|_A < +\infty$  pour tout polynôme  $P$  (en particulier, pour  $P(X) = X$ ) ?  
Quelle condition sur  $A$  entraîne que  $\|P\|_A = 0 \implies P = 0$  ?

---

**Indication pour l'exercice 15 ▲**

1. Utiliser la concavité du logarithme.
  - 2.
  3. Raisonner par homogénéité, en posant  $\alpha_i = \frac{a_i}{(\sum_{j=1}^n a_j^p)^{1/p}}$ .
  4. Décomposer  $(a_i + b_i)^p$  en  $(a_i + b_i)^{p-1}a_i + (a_i + b_i)^{p-1}b_i$ .
  - 5.
- 

**Indication pour l'exercice 16 ▲**

Pour démontrer que des inégalités sont impossibles, utiliser la suite de polynômes  $P_n(X) = 1 + X + \dots + X^n$ .

---

**Indication pour l'exercice 17 ▲**

Considérons  $f_n(x) = x^n$ .

---

**Indication pour l'exercice 18 ▲****Indication pour l'exercice 19 ▲**

- 1.
  - 2.
  - 3.
- 

**Indication pour l'exercice 20 ▲**

- 1.
2. Écrire

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

3. Trouver une suite de fonctions avec norme infinie bornée et grande dérivée.
- 

**Indication pour l'exercice 21 ▲**

1. Que dire d'une fonction continue positive dont l'intégrale est nulle.
  2. Utiliser  $P_n(X) = X^n$ .
  3. Utiliser que  $P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t) dt$ .
- 

**Indication pour l'exercice 22 ▲**

1. Elle est issue d'un produit scalaire.
  2. Écrire  $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$  et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
  3. Calculer  $N(x^n)$ .
-

---

**Indication pour l'exercice 23 ▲**

1. Si  $N_g$  n'est pas une norme, alors il existe  $f \neq 0$  avec  $N_g(f) = 0$ . Que doit contenir l'ensemble des zéros de  $g$ ? Prouver la réciproque.
  2. Une inégalité est facile. Pour l'autre, il ne faut pas que  $g$  soit trop petite. Procéder au besoin par des contre-exemples.
- 

**Indication pour l'exercice 24 ▲**

Trouver un contre-exemple dans  $\mathbb{R}^2$  en séparant la définition de  $u_{2n}$  et de  $u_{2n+1}$ .

---

**Indication pour l'exercice 25 ▲**

1. Extraire une suite consiste à sélectionner certains termes. Pour chercher les suites extraites de  $(u_{2n})$ , il s'agit de trouver toutes les suites pour lesquelles chaque terme est de la forme  $2n$ , c'est-à-dire est pair.
  2. La composée de deux applications strictement croissante est strictement croissante.
- 

**Indication pour l'exercice 26 ▲**

1. Revenir à la définition.
  2. Prendre pour  $u_{2n}$  et pour  $u_{2n+1}$  des suites constantes.
  3. Montrer qu'on peut se ramener aux hypothèses de la question 1 en considérant les suites  $u_{6n}$  et  $u_{6n+3}$ .
- 

**Indication pour l'exercice 27 ▲**

1. Utiliser qu'une suite convergente est majorée, et traiter directement la deuxième question de l'exercice.
2. Montrer que  $(u_n)$  est elle-même majorée par un majorant de la suite extraite.
3. Construire par récurrence sur  $n$  des entiers  $\phi(n)$  tels que

$$\phi(n+1) > \phi(n) \text{ et } u_{\phi(n)} \geq n.$$

---

**Indication pour l'exercice 28 ▲**

1. Ces suites ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, les valeurs d'adhérence sont parmi ces valeurs. Montrer que ce sont toutes ces valeurs.
  2. Définir séparément  $u_{2n}$  (pour garantir l'existence d'une valeur d'adhérence) et  $u_{2n+1}$  (pour garantir que  $(u_n)$  ne converge pas).
- 

**Indication pour l'exercice 29 ▲**

1. Quand peut-on définir une borne inférieure et une borne supérieure?
- 2.
3. Par quoi peut-on majorer et minorer ces suites.
- 4.
5. Encadrer  $u_n$  par  $x_n$  et  $y_n$ .
6. Idem avec des sous-suites.
- 7.
- 8.
9. Construire par récurrence sur  $k$  une suite strictement croissante d'entiers  $(p_k)$  telle que, pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$\beta - \frac{2}{k} \leq u_{p_k} \leq \beta + \frac{2}{k}.$$

10.

---

**Indication pour l'exercice 30 ▲**

---

1. Construire par récurrence sur  $n$  des entiers  $\phi(n)$  tels que

$$\phi(n+1) > \phi(n) \text{ et } u_{\phi(n)} \leq M$$

où  $M$  est obtenu en niant le fait que  $(u_n)$  tende vers  $+\infty$ .

2. Appliquer la question précédente. Que dire d'une suite d'entiers ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?
  3. Appliquer la question précédente, et en déduire qu'une sous-suite de  $(p_n)$  est convergente.
- 

#### Indication pour l'exercice 31 ▲

---

1. Passer par la limite et utiliser l'inégalité triangulaire.
  2. Appliquer la définition d'une suite de Cauchy avec  $\varepsilon = 1$  et contrôler tous les termes de la fin par  $u_N$ . Soit  $a$  la limite de la suite extraite. Grâce à cette suite extraite, on sait que certains termes de la suite seront proches de  $a$ . Puisque c'est une suite de Cauchy, il ne s'en écarteront pas. Il faut ensuite mettre les epsilon dans le bon sens ! Plus qu'un magnifique théorème à utiliser !
  3. Appliquer la définition d'une suite de Cauchy avec  $\varepsilon = 1$  et contrôler tous les termes de la fin par  $u_N$ .
  4. Soit  $a$  la limite de la suite extraite. Grâce à cette suite extraite, on sait que certains termes de la suite seront proches de  $a$ . Puisque c'est une suite de Cauchy, il ne s'en écarteront pas. Il faut ensuite mettre les epsilon dans le bon sens !
  5. Plus qu'un magnifique théorème à utiliser !
- 

#### Indication pour l'exercice 32 ▲

---

1. Démontrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $p > N$  tel que  $u_p \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ .
  2. Démontrer que si  $\ell$  est une valeur d'adhérence de  $u$ , alors  $f(\ell) = \ell$  et en déduire que si  $u$  admet plusieurs valeurs d'adhérence, elle est forcément stationnaire.
- 

#### Indication pour l'exercice 33 ▲

---

1. Écrire  $a = \cos u$  et  $a - \varepsilon = \cos v$  avec  $0 \leq v \leq u \leq \pi$ .
  2. Supposer qu'il y en a simplement un nombre fini, et utiliser à nouveau le résultat de la question précédente.
  - 3.
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

Prenons d'abord  $z \in x + \bar{B}(y, r)$ . Alors il existe  $w \in \bar{B}(y, r)$  tel que  $z = x + w$ . Mais alors,

$$\|(x+y) - z\| = \|y - w\| \leq r$$

et donc  $z \in \bar{B}(x+y, r)$ . Réciproquement, supposons que  $z \in \bar{B}(x+y, r)$  et posons  $w = z - x$ . Alors on a  $z = x + w$  et

$$\|y - w\| = \|y - (z - x)\| = \|(x+y) - z\| \leq r.$$

On a donc  $w \in \bar{B}(y, r)$  ce qui prouve que  $z \in x + \bar{B}(y, r)$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

On va majorer  $\|x - y\|$  en utilisant l'inégalité triangulaire. Vu le contexte de l'énoncé, il y a deux choix naturels possibles : en passant par  $z$  et en passant par  $t$ . On va utiliser les deux pour obtenir les deux inégalités

$$\begin{aligned}\|x - y\| &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ \|x - y\| &\leq \|x - t\| + \|t - y\|.\end{aligned}$$

On fait la même chose avec  $\|z - t\|$  et on obtient

$$\begin{aligned}\|z - t\| &\leq \|z - x\| + \|x - t\| \\ \|z - t\| &\leq \|z - y\| + \|y - t\|.\end{aligned}$$

En sommant les 4 inégalités obtenues, et en divisant par 2, on obtient exactement le résultat voulu.

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. On écrit

$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$$

de sorte que, par l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leq \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|).$$

De même, on a

$$\|y\| \leq \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|)$$

et en sommant les deux inégalités, on a l'inégalité demandé. Puisque  $\|x+y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$  et que  $\|x-y\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$ , on a finalement aussi

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \max(\|x+y\|, \|x-y\|).$$

La constante 2 ne peut pas être améliorée, car elle est parfois atteinte avec  $\|x\| \neq 0$  et  $\|y\| \neq 0$ . C'est le cas en effet par exemple pour  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  lorsque  $x = (1, 0)$  et  $y = (0, 1)$ .

2. Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire dont est issu la norme. Alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle,$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ &\geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &\geq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Puisque  $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2 \max(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2)$ , on obtient bien la deuxième inégalité demandée. Enfin, la constante  $\sqrt{2}$  ne peut pas être améliorée. Elle est atteinte sur  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire canonique lorsque  $x = (1, 0)$  et  $y = (0, 1)$ .

---

#### Correction de l'exercice 4 ▲

On va procéder par contraposée en prouvant que si  $(a, r) \neq (a', r')$ , alors les boules sont différentes. Supposons d'abord que  $a = a'$  et que par exemple  $r' > r$ . Alors considérons  $u$  un vecteur unitaire de  $E$  et  $y = a + r'u$ . Alors  $\|a - y\| = r'\|u\| = r' > r$ . Ainsi,  $y \in \bar{B}(a', r')$  et  $y \notin \bar{B}(a, r)$  et donc ces deux boules ne sont pas égales. Supposons ensuite que  $a \neq a'$  et que, par exemple,  $r' \geq r$  (on aura ainsi bien abordé tous les cas où  $(a, r) \neq (a', r')$ ). Alors on va considérer un élément qui est sur la droite passant par  $a$  et  $a'$ , mais de l'autre côté de  $a$  par rapport à  $a'$  (là aussi, un dessin pourra aider). Précisément, posons  $u$  le vecteur unitaire suivant :

$$u = \frac{a' - a}{\|a' - a\|}.$$

On pose ensuite  $x = a' + r'u$ . Comme précédemment, on a  $\|x - a'\| = r'$  et donc  $x \in \bar{B}(a', r')$ . Mais d'autre part, on a

$$x - a = (a' - a) \left( 1 + \frac{r'}{\|a' - a\|} \right)$$

d'où

$$\|x - a\| = \|a' - a\| \left( 1 + \frac{r'}{\|a' - a\|} \right) = \|a' - a\| + r' > r$$

et donc  $x \notin \bar{B}(a, r)$ .

---

#### Correction de l'exercice 5 ▲

Pour comprendre ce type d'exercice, il faut impérativement commencer par réaliser un dessin.

1. La contrainte la plus forte exprimée par l'inclusion  $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(b, s)$  est obtenue pour le point de  $\bar{B}(a, r)$  le plus éloigné de  $b$  possible. On considère ce point qui est donné par  $x = a + r(a - b)/\|a - b\|$ .  $x$  est dans  $\bar{B}(a, r)$ , donc dans  $\bar{B}(b, s)$ . Or

$$x - b = \left( 1 + \frac{r}{\|b - a\|} \right) (a - b) \implies \|x - b\| = \|b - a\| + r.$$

Puisque  $\|x - b\| \leq s$ , on en déduit le résultat recherché.

2. Cette fois, on considère  $y$  "le" point de  $\bar{B}(a, r)$  le plus proche de  $b$ . On a donc  $y = a + r(b - a)/\|b - a\|$ . Puisque  $y \notin \bar{B}(b, s)$ , on a  $\|y - b\| > s$ . Mais on a aussi

$$y - b = \left( 1 - \frac{r}{\|b - a\|} \right) (a - b) \implies \|y - b\| = \|b - a\| - r.$$

Ceci donne le résultat voulu.

---

#### Correction de l'exercice 6 ▲

Remarquons que si deux matrices sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres. Mais ici, si on veut que  $A$  et  $2A$  aient les mêmes valeurs propres, il faut que  $A$  n'admette que la valeur propre nulle. Puisque  $A$  n'est pas la matrice nulle, ceci oriente nos recherches d'une telle matrice  $A$  vers une matrice nilpotente. Considérons la plus simple d'entre elles :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors  $A$  et semblable à  $2A$  : en effet, on a  $A = P(2A)P^{-1}$  où  $P$  est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il ne peut pas avoir de norme sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  invariante par similitude, puisqu'on n'a pas  $\|2A\| = \|A\|$ . Le raisonnement est identique pour  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on considère cette fois la matrice  $A$  dont le seul coefficient non nul est celui le plus à droite sur la première ligne, ce coefficient étant égal à 1.

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Alors si  $N$  est une norme, on sait que  $N(e_k) = a_k > 0$ , et donc il est nécessaire que tous les  $a_k$  soient strictement positifs. Cette condition est également suffisante. En effet,  $N$  est alors bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , il est clair que l'on a  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  et que, si  $N(x) = 0$ , alors

$$a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n| = 0 \implies x = 0$$

puisque l'on somme à gauche des éléments qui sont tous positifs. Leur somme étant nulle, chacun des éléments doit être nul. Enfin, l'inégalité triangulaire se prouve simplement comme pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . En effet, si  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$\begin{aligned} N(x+y) &= a_1|x_1+y_1| + \dots + a_n|x_n+y_n| \\ &\leq a_1(|x_1|+|y_1|) + \dots + a_n(|x_n|+|y_n|) \\ &\leq a_1|x_1| + \dots + a_n|x_n| + a_1|y_1| + \dots + a_n|y_n| \leq \\ &N(x) + N(y). \end{aligned}$$


---

### Correction de l'exercice 8 ▲

On vérifie les trois propriétés définissant une norme (on remarque que  $N$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ). D'une part, si  $N(x) = 0$ , alors  $N_1(x) = 0$  et donc  $x = 0$  puisque  $N_1$  est une norme. Ensuite, si  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= \max(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)) \\ &= \max(|\lambda|N_1(x), |\lambda|N_2(x)) \\ &= |\lambda| \max(N_1(x), N_2(x)) \\ &= |\lambda|N(x). \end{aligned}$$

Enfin, prouvons l'inégalité triangulaire pour  $N$ . En effet, si  $x$  et  $y$  sont dans  $E$ , alors d'une part

$$N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \leq N(x) + N(y)$$

et d'autre part

$$N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \leq N(x) + N(y).$$

En passant au maximum, on obtient bien

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$


---

### Correction de l'exercice 9 ▲

On commence par remarquer que  $N$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . De plus, si  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , en utilisant la linéarité de  $f$ , on a

$$N(\lambda x) = \|f(\lambda x)\| = \|\lambda f(x)\| = |\lambda| \cdot \|f(x)\| = |\lambda|N(x)$$

et

$$N(x+y) = \|f(x+y)\| = \|f(x) + f(y)\| \leq \|f(x)\| + \|f(y)\| = N(x) + N(y).$$

Le point clé est donc de trouver une condition sur  $f$  pour que  $N(x) = 0 \implies x = 0$ . Mais puisque  $\|\cdot\|$  est une norme,  $N(x) = 0 \iff f(x) = 0$  et ceci est équivalent à 0 si et seulement si  $f$  est injective. Ainsi,  $N$  est une norme sur  $E$  si et seulement si  $f$  est injective.

---

### Correction de l'exercice 10 ▲

1. Le seul point non immédiat est de vérifier que  $N$  vérifie l'inégalité triangulaire. Pour cela, on s'inspire du même résultat concernant la norme euclidienne usuelle. Prenons en effet  $X_1 = (x_1, y_1)$  et  $X_2 = (x_2, y_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors :

$$\begin{aligned} N^2(X_1 + X_2) &= a^2(x_1 + x_2)^2 + b^2(y_1 + y_2)^2 \\ &= a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b^2y_2^2 + 2a^2x_1x_2 + 2b^2y_1y_2 \\ &= a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b^2y_2^2 + 2((ax_1)(ax_2) + (by_1)(by_2)) \\ &\leq a^2x_1^2 + a^2x_2^2 + b^2y_1^2 + b^2y_2^2 + 2\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2}\sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2} \end{aligned}$$

où la dernière ligne est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc obtenu

$$N^2(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \leq \left( \sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2} + \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2} \right)^2 = (N(X_1) + N(X_2))^2$$

ce qui est bien l'inégalité triangulaire voulue. On pouvait aussi remarquer que  $N$  est la norme issue du produit scalaire suivant :

$$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = a^2x_1x_2 + b^2y_1y_2.$$

2.  $(x, y)$  est dans cette boule si et seulement si  $a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1$ . On reconnaît une ellipse dont les extrémités des axes sont les points  $(\pm\frac{1}{a}, 0)$  et  $(0, \pm\frac{1}{b})$ .

3. Supposons par exemple  $a \leq b$ . Alors, pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$N(x, y) \leq \sqrt{b^2x^2 + b^2y^2} \leq b\|(x, y)\|_2.$$

De plus, pour tous les éléments de la forme  $(0, y)$ , on a égalité. Le nombre  $p$  recherché est donc  $\max(a, b)$ . Un raisonnement similaire montre que le nombre  $q$  recherché est  $\min(a, b)$ .

---

### Correction de l'exercice 11 ▲

La démonstration du fait qu'il s'agit d'une norme est une simple modification du cas classique de la norme infinie dans  $\mathbb{R}^n$ . On peut d'ailleurs procéder par isomorphisme entre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Montrons qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, en prenant  $A, B \in \mathcal{M}_n()$ , et en posant  $C = AB$ . Écrivons  $C = (c_{i,j})$ . On a  $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$ . On a donc :

$$\begin{aligned} n|c_{i,j}| &\leq n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \\ &\leq n \sum_{k=1}^n \frac{N(A)}{n} \frac{N(B)}{n} \\ &\leq N(A)N(B). \end{aligned}$$

---

### Correction de l'exercice 12 ▲

Faisons un raisonnement par l'absurde, et supposons qu'il existe un produit scalaire  $\phi_1$  sur  $\mathbb{R}^n$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\phi_1(x, x) = \|x\|_1^2$ . Alors, par la formule de polarisation, on sait que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on a

$$\phi_1(x, y) = \frac{1}{2} (\|x+y\|_1^2 - \|x\|_1^2 - \|y\|_1^2).$$

Appliquons ceci avec  $x = e_1$  et  $y = e_2$ . Il vient

$$\begin{aligned} \phi_1(e_1, e_2) &= \frac{1}{2} (\|e_1 + e_2\|_1^2 - \|e_1\|_1^2 - \|e_2\|_1^2) \\ &= \frac{1}{2} (4 - 1 - 1) = 1. \end{aligned}$$

Mais un calcul complètement similaire prouve que

$$\varphi_1(e_1, -e_2) = 1.$$

Ainsi, on a  $\varphi_1(e_1, e_2) = \varphi_1(e_1, -e_2)$  ce qui contredit que  $\varphi_1$  est bilinéaire. Le raisonnement est tout à fait similaire pour la norme infinie. Si elle était issue d'un produit scalaire  $\varphi_\infty$ , alors on trouverait

$$\varphi_\infty(e_1, e_2) = \varphi_\infty(e_1, -e_2) = -\frac{1}{2},$$

une contradiction.

---

### Correction de l'exercice 13 ▲

On va démontrer que  $N$  est la norme issue d'un produit scalaire (remarquons que pour le moment, nous n'avons pas encore prouvé que  $N$  est toujours définie). Pour cela, on procède par polarisation, et pour  $x = (a, b)$ ,  $x' = (a', b')$ , on pose

$$\phi(x, x') = aa' + a'b + ab' + 5bb'.$$

$\phi$  est clairement une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^2$ , il reste à voir qu'elle est définie et positive. Mais on a

$$\phi(x, x) = a^2 + 2ab + 5b^2 = (a + b)^2 + 4b^2$$

(l'idée est ici de reconnaître dans  $a^2 + 2ab$  le début du développement d'un carré). On en déduit que l'on a toujours  $\phi(x, x) \geq 0$  et de plus, si  $\phi(x, x) = 0$ , alors on a  $(a + b) = 0$  et  $b = 0$ , ce qui entraîne bien sûr  $a = b = 0$ . Ainsi,  $N$  est la norme associée au produit scalaire  $\phi$ .

---

### Correction de l'exercice 14 ▲

Une première condition nécessaire sur  $A$  apparaît en remarquant qu'il faut que  $\|P\|_A < +\infty$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ . C'est en particulier vrai pour le polynôme  $P(X) = X$  et donc il est nécessaire que  $A$  soit bornée. Une seconde condition nécessaire apparaît quand on écrit que  $\|P\|_A = 0 \implies P = 0$ . Supposons en effet que  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  soit fini. Alors prenons  $P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ . Alors on a  $\|P\|_A = 0$  et pourtant  $P \neq 0$ . Réciproquement, prouvons que si  $A$  est une partie infinie bornée, alors  $\|\cdot\|_A$  définit une norme sur  $\mathbb{R}[X]$ . D'une part, puisque  $A$  est bornée, il existe  $M > 0$  tel que  $A \subset [-M, M]$ . Mais pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P$  est continue, donc bornée sur  $[-M, M]$ . Ainsi  $P$  est bornée sur  $A$ , et donc  $\|P\|_A$  est bien défini et cette quantité est un réel positif ou nul. D'autre part, vérifions les trois propriétés de la définition d'une norme :

1. On a toujours, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\sup_{x \in A} |\lambda P(x)| = |\lambda| \times \sup_{x \in A} |P(x)|$  et donc  $\|\lambda P\|_A = |\lambda| \times \|P\|_A$ .

2. Si  $\|P\|_A = 0$ , alors  $P$  admet une infinité de racines, et donc  $P$  est le polynôme nul.

3. Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ . Alors, pour tout  $x \in A$ ,

$$|P(x) + Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \|P\|_A + \|Q\|_A.$$

En passant au sup, on obtient que  $\|P + Q\|_A \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$ . En conclusion,  $\|\cdot\|_A$  définit une norme sur  $\mathbb{R}[X]$  si et seulement si  $A$  est une partie infinie bornée.

---

### Correction de l'exercice 15 ▲

1. La fonction  $\ln$  est concave, et on a donc :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) = \ln(xy).$$

Il suffit ensuite d'utiliser la croissance de la fonction exponentielle pour en déduire le résultat voulu.

2. Il suffit de sommer les  $n$  équations :

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q.$$



3. On pose  $\alpha_i = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{1/p}}$  et  $\beta_i = \frac{b_i}{(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{1/q}}$ . D'après la question précédente,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq 1.$$

Il suffit ensuite de remplacer  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  par leur valeur pour trouver la formule.

4. On décompose  $(a_i + b_i)^p$  en  $(a_i + b_i)^{p-1}a_i + (a_i + b_i)^{p-1}b_i$ . Soit  $q$  tel que  $1/p + 1/q = 1$ , c'est à dire que  $pq - q = p$ . En appliquant Hölder à chacun des membres, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &\leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \times \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \times \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &\leq \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \right] \times \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1-1/p}. \end{aligned}$$

Il suffit de tout refaire passer au premier membre pour obtenir le résultat. Remarquons que le résultat est aussi vrai pour  $p = 1$ . Dans ce cas, il est juste trivial !

5. L'inégalité précédente se traduit très facilement en disant que  $\|\cdot\|_p$  vérifie l'inégalité triangulaire  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ . Il est en outre trivial de vérifier que  $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$  et que  $\|x\|_p = 0 \iff x = 0$ . Ainsi,  $\|\cdot\|_p$  définit bien une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Correction de l'exercice 16 ▲

La démonstration qu'il s'agit de normes suit en tout point celle classique concernant les mêmes normes sur  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que  $N_1(P) \leq CN_\infty(P)$ . Prenons  $P_n = 1 + X + \dots + X^n$ . Alors  $N_1(P_n) = n + 1 \leq C$ , ce qui est impossible pour  $n$  grand. Si  $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$ , pour le même polynôme  $P_n$ , on a  $N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \leq C$ , ce qui est toujours impossible. Enfin, la même suite de polynômes, et le même raisonnement, prouve qu'une inégalité  $N_1(P_n) \leq CN_2(P_n)$  est tout aussi impossible. Remarquons que la preuve que ces trois normes ne sont pas équivalentes repose sur le fait que  $\mathbb{R}[X]$  est de dimension infinie.

### Correction de l'exercice 17 ▲

Considérons, pour  $n \geq 1$ ,  $f_n(x) = x^n$ . On a alors

$$\|f_n\|_\infty = 1, \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ et } \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Si  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_2$  étaient équivalentes, il existerait  $A, B > 0$  tels que, pour tout  $n$ ,

$$A \leq \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} \leq B.$$

Mais  $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  et un tel encadrement est impossible (on obtiendrait à la limite  $A \leq 0$ ).

### Correction de l'exercice 18 ▲

On va démontrer que  $N_1$  est une norme, la preuve est exactement identique pour  $N_2$ . On commence par remarquer que  $N_1$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . De plus, si  $N_1(x) = 0$  alors on a  $f(0) = 0$  et  $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$ . Or,  $|f'|$  est une fonction continue et positive sur  $[0, 1]$  : la condition  $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$  entraîne donc que  $f' = 0$  sur  $[0, 1]$  donc que  $f$  est constante. Puisque  $f(0) = 0$ , on a bien  $f = 0$ . Les autres propriétés sont faciles à vérifier. En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tous  $f, g \in E$ , on a

$$\begin{aligned} N_1(\lambda f) &= |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)| dt \\ &= |\lambda| \cdot |f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)| dt \\ &= |\lambda| N_1(f) \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} N_1(f+g) &= |(f+g)(0)| + \int_0^1 |(f+g)'(t)| dt \\ &= |f(0) + g(0)| + \int_0^1 |f'(t) + g'(t)| dt \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 (|f'(t)| + |g'(t)|) dt \\ &\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt + |g(0)| + \int_0^1 |g'(t)| dt \\ &\leq N_1(f) + N_1(g). \end{aligned}$$

Enfin, pour conclure, on peut remarquer que  $N_1 \leq 2N_2$  et que  $N_2 \leq 2N_1$ . Les deux normes sont bien équivalentes.

---

### Correction de l'exercice 19 ▲

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans  $N_1(P)$  est en réalité une somme finie. Prenons ensuite  $P, Q$  dans  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

et donc, en passant à la somme  $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$ . On a clairement  $N_1(\lambda P) = |\lambda|N_1(P)$ . Enfin, si  $N_1(P) = 0$ , alors 0 est une racine de multiplicité infinie de  $P$ , ce qui entraîne que  $P = 0$ . Passons maintenant à  $N_2$ . On a, pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

En passant au sup pour  $t \in [-1, 1]$ , on en déduit que

$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

Il est clair que  $N_2(\lambda P) = |\lambda|N_2(P)$ , et si  $N_2(P) = 0$ , alors  $P$  admet une infinité de racines, donc  $P = 0$ . Ainsi,  $N_2$  est également une norme sur  $E$ .

2. On vérifie facilement que, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $P_n^{(k)} = (n-1) \cdots (n-k+1)X^{n-k}$ . Ainsi,  $P_n^{(k)}(0) = 0$  si  $k \neq n$  et  $P_n^{(n)}(0) = (n-1)!$ . On a donc

$$N_1(P_n) = (n-1)! \text{ et } N_2(P_n) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, la suite  $(P_n)$  converge vers 0 pour  $N_2$ , mais n'est pas bornée et donc ne converge pas pour  $N_1$ .

3. Les normes ne peuvent pas être équivalentes, sinon une suite convergente pour une norme serait une suite convergente pour l'autre norme.

---

### Correction de l'exercice 20 ▲

1. Remarquons d'abord que  $N$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et prenons  $f, g \in E$ . Alors on a  $N(f) = 0$  si et seulement si  $f(0) = 0$  et  $f' \equiv 0$ . La deuxième condition entraîne que  $f$  est constante sur  $[0, 1]$  et la première que  $f$  est identiquement nulle. De plus, on a clairement  $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$  et

$$N(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g).$$

$N$  est une norme, et la preuve est identique, mais plus simple, pour  $N'$ .

2. Il est d'abord clair que  $N(f) \leq N'(f)$ . De plus, si  $x \in [0, 1]$ , alors on écrit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

Il vient

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \leq |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty dt \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N(f).$$

On en déduit que  $\|f\|_\infty \leq N(f)$ , puis que  $N'(f) \leq 2N(f)$ .

3. La forme des normes nous incite à considérer une suite de fonctions avec norme infinie bornée, mais ayant une grande dérivée, par exemple à considérer pour  $n \geq 1$ ,  $f_n(x) = x^n$ . Alors  $\|f_n\|_\infty = 1$  tandis que  $N(f_n) = n$ . Les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N$  ne sont pas équivalentes. A fortiori, les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N'$  ne sont pas équivalentes.

---

### Correction de l'exercice 21 ▲

La deuxième partie de l'exercice est corrigée dans la vidéo suivante :

1. La seule difficulté est de vérifier que  $N_a(P) = 0 \implies P = 0$ . Mais si  $N_a(P) = 0$ , on a à la fois  $|P(a)| = 0$  et  $\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$ . Or,  $|P'|$  est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ . Donc  $P' = 0$  sur  $[0, 1]$ . Comme  $P'$  est un polynôme, ceci entraîne que  $P' = 0$  ou encore que  $P$  est un polynôme constant. Puisque  $P(a) = 0$ , on en déduit que  $P$  est identiquement nul.

2. Supposons que  $N_a$  et  $N_b$  sont équivalentes. Alors, il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  tels que, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$C_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq C_2 N_a(P).$$

Pour  $n \geq 0$ , soit  $P(X) = X^n$ . On a

$$N_a(P) = a^n + n \int_0^1 t^{n-1} dt = a^n + 1 \text{ et } N_b(P) = b^n + 1.$$

On en déduit alors que, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$b^n + 1 \leq C_2(a^n + 1) \iff 1 + \frac{1}{b^n} \leq C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{C_2}{b^n}.$$

Or, le membre de gauche tend vers 1 et le membre de droite vers 0. On obtient en passant à la limite  $1 \leq 0$ , ce qui est absurde. L'hypothèse de départ est donc fautive, et  $N_a$  et  $N_b$  ne sont pas équivalentes.

3. Supposons par exemple  $a \leq b$ . Alors

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t) dt \leq \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

Ainsi,

$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq N_a(P).$$

Il vient

$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq 2N_a(P).$$

On a de la même façon

$$|P(a)| \leq |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq N_b(P)$$

et donc

$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$

Les deux normes sont bien équivalentes.

---

### Correction de l'exercice 22 ▲

1. Posons, pour  $f, g \in E$ ,  $\phi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ . Il est clair que  $N(f) = \sqrt{\phi(f, f)}$  et donc il suffit de démontrer que  $\phi$  est un produit scalaire. C'est clairement une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si  $\phi(f, f) = 0$ , alors  $f(0) = 0$  et  $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$ . Puisque  $(f')^2$  est une fonction continue et positive sur  $[0, 1]$ , et d'intégrale nulle,  $f'$  est identiquement nulle sur  $[0, 1]$ . Ainsi,  $f' = 0$  donc  $f$  est constante, et comme  $f(0) = 0$ ,  $f$  est la fonction nulle.  $\phi$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive, et donc  $N$  est une norme.

2. Soit  $x \in [0, 1]$ . Alors on écrit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt.$$

On en déduit que

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale, on tire

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left( \int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq |f(0)| + \left( \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On applique ensuite (encore !) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois dans  $\mathbb{R}^2$ . On en déduit que

$$|f(x)| \leq \left( |f(0)|^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2} \times (1^2 + 1^2)^{1/2}.$$

Prenant le sup pour  $x \in [0, 1]$ , on en déduit bien que

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f).$$

3. Il est facile de vérifier que  $\|x^n\|_\infty = 1$  tandis que  $N(x^n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$ . Ainsi, les deux normes ne peuvent pas être équivalentes.

---

### Correction de l'exercice 23 ▲

1. La seule propriété qui pose problème est de prouver que si  $N_g(f) = 0$ , alors  $f = 0$ . Si  $N_g$  n'est pas une norme, alors il existe  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ ,  $f \neq 0$ , avec  $N_g(f) = 0$ . Autrement,  $f(x)g(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Puisque  $f$  est continue et non-nulle, il existe un intervalle  $I$ , non réduit à un point, sur lequel  $f$  ne s'annule pas. Mais alors, on en déduit que  $g$  doit être nulle sur  $I$ . Réciproquement, si  $g$  s'annule sur un intervalle  $I$  non-réduit à un point, alors on peut construire  $f$  continue qui s'annule hors de  $I$  et tel qu'il existe  $a \in I$  avec  $f(a) \neq 0$  (faire un dessin et construire  $f$  comme un "pic"). On a donc  $f \neq 0$  et  $N_g(f) = 0$ , donc  $N_g$  n'est pas une norme. Par contraposée, on en déduit que  $N_g$  est une norme si et seulement si  $g$  ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.

2. Remarquons déjà que  $g$ , continue sur le segment  $[0, 1]$ , est bornée par une constante  $M > 0$ . On a donc  $N_g(f) \leq M\|f\|_\infty$  pour tout  $f \in E$ . Supposons de plus que  $g$  ne s'annule pas. Alors, puisque  $|g|$  est continue et atteint ses bornes sur  $[0, 1]$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|g(x)| \geq \delta$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . On a alors clairement  $N_g(f) \geq \delta\|f\|_\infty$  et les deux normes sont équivalentes. Réciproquement, si  $g$  s'annule, prouvons que les deux normes ne sont pas équivalentes. Soit  $M > 0$ . On va construire  $f \in E$ ,  $f \neq 0$ , tel que  $\|f\|_\infty \geq MN_g(f)$ . Pour cela, on sait, par continuité de  $g$ , qu'il existe un intervalle  $I$ , non-réduit à un point, et contenu dans  $[0, 1]$ , tel que  $|g(x)| \leq \frac{1}{M}$  pour tout  $x \in I$ . Comme à la question précédente, on peut construire  $f$  nulle en dehors de  $I$ , avec  $\|f\|_\infty \leq 1$  et  $f(a) = 1$  pour au moins un  $a$  de  $I$ . On a alors

$$\|f\|_\infty = 1 \text{ tandis que } N_g(f) = \sup_{x \in I} |g(x)f(x)| \leq \frac{1}{M}.$$

Ceci prouve bien l'inégalité annoncée, et les deux normes ne sont pas équivalentes. En conclusion, on a démontré que les deux normes sont équivalentes si et seulement si  $g$  ne s'annule pas.

---

### Correction de l'exercice 24 ▲

Non ! Par exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , considérons  $(u_n)$  définie par  $u_{2n} = (n, 0)$  et  $u_{2n+1} = (0, n)$ . Alors chacune des suites coordonnées admet une suite extraite convergente (et même constante). Si on considère maintenant une suite extraite  $(u_{\phi(n)})$ , alors  $\|u_{\phi(n)}\|_\infty \geq \phi(n) \geq n$  et la suite ne peut pas converger.

---

### Correction de l'exercice 25 ▲

1. Extraire une suite consiste à sélectionner certains termes. Pour chercher les suites extraites de  $(u_{2n})$ , il s'agit de trouver toutes les suites pour lesquelles chaque terme est de la forme  $2n$ , c'est-à-dire est pair.  $(u_{3n})$  ne convient pas (par exemple, pour  $n = 1$ ,  $u_3$  n'est pas un élément de  $(u_{2n})$ ). En revanche,  $(u_{6n})$  convient, car chaque entier de la forme  $6n$  s'écrit encore  $2p$ , avec  $p = 3n$ . Ainsi,  $(u_{6n})$  est extraite de  $(u_{2n})$ . Il en est de même de  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$  et de  $(u_{2^{n+1}})$ , car par exemple  $2^{n+1} = 2p$  avec  $p = 2^n$ . Attention aux faux-amis  $(u_{2^n})$  et  $(u_{3 \cdot 2^n})$ , qui ne conviennent pas à cause du terme correspondant à  $n = 0$ . Pour les autres suites :

Les suites extraites de  $(u_{3n})$  sont  $(u_{6n})$ ,  $(u_{3 \cdot 2^n})$ ,  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ ; Seule la suite  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$  est extraite de  $(u_{6n})$  (remarquons que  $3 \cdot 2^{n+1} = 6p$  avec  $p = 2^n$ ); Seule la suite  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$  est extraite de  $(u_{3 \cdot 2^n})$ ; Seule la suite  $(u_{2^{n+1}})$  est extraite de  $(u_{2^n})$  (remarquons que  $3 \cdot 2^n$  n'est pas une puissance de 2); Aucune des suites proposées n'est extraite de  $(u_{2^{n+1}})$ ; La suite  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$  n'admet pas de suite extraite dans la liste donnée.

2. Les suites extraites de  $(u_{3n})$  sont  $(u_{6n})$ ,  $(u_{3 \cdot 2^n})$ ,  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$ ;

3. Seule la suite  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$  est extraite de  $(u_{6n})$  (remarquons que  $3 \cdot 2^{n+1} = 6p$  avec  $p = 2^n$ );

4. Seule la suite  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$  est extraite de  $(u_{3 \cdot 2^n})$ ;

5. Seule la suite  $(u_{2^{n+1}})$  est extraite de  $(u_{2^n})$  (remarquons que  $3 \cdot 2^n$  n'est pas une puissance de 2);

6. Aucune des suites proposées n'est extraite de  $(u_{2^{n+1}})$ ;

7. La suite  $(u_{3 \cdot 2^{n+1}})$  n'admet pas de suite extraite dans la liste donnée.

8. Posons  $v_n = u_{\varphi(n)}$ , et soit  $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante donnant la suite extraite considérée  $(v_{\psi(n)})_n$ . On a alors  $v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$ . Or,  $\varphi \circ \psi$  est strictement croissante comme composée d'applications strictement croissantes. La suite  $(v_{\psi(n)})$  est donc bien extraite de  $(u_n)$ . Remarquons (c'est important !) le sens de la composition. On a bien  $\varphi(\psi(n))$  et non  $\psi(\varphi(n))$ .

---

### Correction de l'exercice 26 ▲

1. Fixons  $\varepsilon > 0$  et  $l$  la limite commune des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ . Alors, puisque  $(u_{2n})$  converge vers  $l$ ,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |u_{2n} - l| < \varepsilon.$$

De même, puisque  $(u_{2n+1})$  converge vers  $l$ ,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |u_{2n+1} - l| < \varepsilon.$$

Posons  $N = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$ . Alors, pour  $p \geq N$ , si  $p$  est pair et s'écrit  $2n$ , on a  $n \geq n_1$  et si  $p$  est impair et s'écrit  $2n + 1$ , on a  $n \geq n_2$ . Dans tous les cas, on trouve

$$|u_p - l| < \varepsilon.$$

C'est bien que la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

2. Posons  $u_n = (-1)^n$ . Alors  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = -1$ , et donc  $(u_{2n})$  converge vers 1,  $(u_{2n+1})$  converge vers  $-1$  et  $(u_n)$  ne converge pas.

3. Notons  $l_1$  la limite de  $(u_{2n})$ ,  $l_2$  la limite de  $(u_{2n+1})$  et  $l_3$  la limite de  $(u_{3n})$ . Afin d'utiliser le résultat de la première question, il s'agit de prouver que  $l_1 = l_2$ . Considérons la suite  $(u_{6n})$ . C'est une suite extraite de  $(u_{2n})$  donc elle converge vers  $l_1$ . C'est aussi une suite extraite de  $(u_{3n})$ , donc elle converge vers  $l_3$ . Par unicité de la limite, on obtient  $l_1 = l_3$ . Considérons ensuite la suite  $(u_{6n+3})$ , suite extraite aussi bien de  $(u_{2n+1})$  que de  $(u_{3n})$ . En raisonnant comme précédemment, on trouve  $l_2 = l_3$ . Finalement, on obtient  $l_1 = l_2$  et la suite  $(u_n)$  est convergente.

---

### Correction de l'exercice 27 ▲

1. Puisqu'une suite convergente est majorée, il suffit de prouver que, dans les conditions de la question 2., la suite  $(u_n)$  est convergente. On traite donc directement 2.

2. On va prouver que  $(u_n)$  est convergente en prouvant qu'elle est majorée. Soit  $(u_{\phi(n)})$  une suite extraite de  $(u_n)$  qui est majorée, disons par  $M \in \mathbb{R}$ . On sait que, pour une suite extraite, on a toujours  $\phi(n) \geq n$ . On a donc  $u_n \leq u_{\phi(n)} \leq M$ . Ainsi, la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée donc elle converge.

3. On va construire par récurrence sur  $n$  des entiers  $\phi(n)$  tels que

$$\phi(n+1) > \phi(n) \text{ et } u_{\phi(n)} \geq n.$$

Pour  $n=0$ , il suffit de choisir  $\phi(0)$  tel que  $u_{\phi(0)} \geq 0$ . Supposons  $\phi(n)$  construit, et posons  $A = \max(n, u_0, \dots, u_{\phi(n)}) + 1$ . Puisque  $(u_k)$  est non-majorée, on peut trouver un entier  $p$  tel que  $u_p \geq A$ . Mais alors, par choix de  $A$ , il est clair que  $p$  ne peut être égal à  $0, 1, \dots, \phi(n)$ . On a donc  $p > \phi(n)$  et  $u_p \geq n+1$ . Le choix  $\phi(n+1) = p$  répond alors aux exigences formulées. Mais alors la suite  $(u_{\phi(n)})$  est bien une suite extraite de  $(u_n)$ , car l'application  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante. De plus, par construction, elle tend vers  $+\infty$ .

---

### Correction de l'exercice 28 ▲

1. La suite  $(-1)^n$  ne prend que les valeurs 1 et -1. Il est clair que toute suite extraite ne prenant que l'une de ces deux valeurs ne pourra converger que vers 1 ou vers -1. L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc inclus dans  $\{-1, 1\}$ . D'autre part, en notant  $u_n = (-1)^n$ , on a  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = -1$ . Ainsi, 1 et -1 sont effectivement des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$ . Pour la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \cos(n\pi/3)$ , le même raisonnement prouve que les valeurs d'adhérence sont  $\cos(0), \cos(\pi/3), \cos(2\pi/3), \cos(\pi)$ , c'est-à-dire 1, 1/2, -1/2 et -1.

2. Posons  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = n$ . Alors 1 est valeur d'adhérence, et la suite  $(u_n)$  est divergente. De plus, 1 est l'unique valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . En effet, considérons  $(u_{\phi(n)})$  une suite extraite de  $(u_n)$ . Si  $\phi(n)$  est un entier impair pour une infinité de termes, alors  $(u_{\phi(n)})$  est divergente. Sinon,  $\phi(n)$  est pair sauf pour un nombre fini d'entiers  $n$  et  $(u_{\phi(n)})$  est stationnaire donc convergente vers 1.

---

### Correction de l'exercice 29 ▲

1. Notons  $m$  un minorant de la suite  $(u_n)$ ,  $M$  un majorant de cette suite, et pour tout  $n \geq 0$ , notons

$$A_n = \{u_p; p \geq n\}.$$

Alors l'ensemble  $A_n$  est minoré par  $m$  et majoré par  $M$ . En conséquence, il admet une borne inférieure et une borne supérieure.

2. Dans le premier cas, pour tout entier  $n$ , on a  $A_n = \{-1, 1\}$  et donc  $x_n = -1$ ,  $y_n = 1$ . Dans le second cas, l'ensemble  $A_n$  est minoré par  $1 - \frac{1}{n+1}$  (car la suite est croissante), et cet élément appartient à  $A_n$ . Donc  $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ . L'ensemble  $A_n$  est majoré par 1, et de plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $p > n$  tel que

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{p+1} \leq 1.$$

Ainsi,  $y_n$ , borne supérieure de  $A_n$ , est égal à 1.

3. On a  $A_{n+1} \subset A_n$ , ce qui entraîne automatiquement que  $x_{n+1} \geq x_n$  et  $y_{n+1} \leq y_n$ . De plus, les deux suites sont bornées (minorées, avec les notations précédentes, par  $m$  et majorées par  $M$ ). Ainsi, les deux suites sont convergentes.

4. Pour tout entier  $n$ , on a  $x_n \leq y_n$ , et donc, en passant à la limite, on a  $\alpha \leq \beta$ .

5. Pour tout entier  $n$ , on a  $x_n \leq u_n \leq y_n$  car  $u_n$  est élément de  $A_n$ . Par le théorème des gendarmes,  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .

6. Si  $(u_{\phi(n)})$  converge vers  $\ell$ , alors puisque pour tout entier  $n$  on a

$$x_{\phi(n)} \leq u_{\phi(n)} \leq y_{\phi(n)},$$

on en déduit par passage à la limite des inégalités que

$$\alpha \leq \ell \leq \beta.$$

7. C'est simplement la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

8. Puisque  $(y_n)$  converge vers  $\beta$ , on peut trouver  $n \geq p_0$  tel que

$$\beta - \varepsilon \leq y_n \leq \beta + \varepsilon.$$

D'après la question précédente, on peut trouver  $p \geq n \geq p_0$  tel que

$$\beta - 2\varepsilon \leq y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n \leq \beta + \varepsilon.$$

9. Construisons par récurrence sur  $k$  une suite strictement croissante d'entiers  $(p_k)$  telle que, pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$\beta - \frac{2}{k} \leq u_{p_k} \leq \beta + \frac{2}{k}.$$

Si ceci est fait, la suite  $(u_{p_k})$  est bien une suite extraite de  $(u_n)$  qui converge, par le théorème des gendarmes, vers  $\beta$ . Passons maintenant à la construction. Pour construire  $p_1$ , on applique le résultat de la question précédente avec  $\varepsilon = 1$  et  $p_0 = 0$ . Supposons  $p_{k-1}$  construit. Alors on construit  $p_k$  en appliquant le résultat de la question précédente avec  $\varepsilon = \frac{1}{k}$  et  $p_0 = p_{k-1} + 1$ .

10. On vient de redémontrer le théorème de Weierstrass.

---

### Correction de l'exercice 30 ▲

1. Supposons d'abord que  $(u_n)$  ne tend pas vers  $+\infty$ . Il existe donc un réel  $M > 0$  tel que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $p \geq N$  avec  $u_p \leq M$ . On va construire par récurrence sur  $n$  des entiers  $\phi(n)$  tels que, pour tout entier  $n$ ,

$$\phi(n+1) > \phi(n) \text{ et } u_{\phi(n)} \leq M.$$

Pour  $n = 0$ , on applique la proposition avec  $N = 0$  et on pose  $\phi(0) = p$ . Supposons  $\phi(n)$  construit, et posons  $N = \max(\phi(0), \dots, \phi(n)) + 1$ . Alors il existe  $p > N$  tel que  $u_p \leq M$ . On pose  $\phi(n+1) = p$  qui vérifie bien  $\phi(n+1) > \phi(n)$ . Mais alors la suite  $(u_{\phi(n)})$  est bien une suite extraite de  $(u_n)$ , car l'application  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante. De plus, par construction, elle est majorée par  $M$ . Réciproquement, supposons qu'il existe une suite extraite  $(u_{\phi(n)})$  majorée par  $M$ . Alors, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , si on pose  $p = \phi(N) \geq N$ , on a  $u_p = u_{\phi(N)} \leq M$  et donc  $(u_n)$  ne tend pas vers  $+\infty$ .

2. On applique la question précédente. Il existe une suite extraite de  $(q_n)$  qui est majorée par un certain réel  $M$ . Mais alors, cette suite extraite ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs,  $0, 1, \dots, \lfloor M \rfloor$ . On peut donc encore extraire de cette suite extraite une suite constante.

3. Si la suite  $(q_n)$  ne tend pas vers  $+\infty$ , on peut en extraire une sous-suite  $(q_{\phi(n)})$  qui est constante égale à un certain  $q$ . On a alors  $(r_{\phi(n)})$  qui tend vers  $x$ , donc  $(p_{\phi(n)}) = (qr_{\phi(n)})$  qui tend vers  $qx$ . On a ainsi une suite d'entiers qui converge. Elle est forcément stationnaire et sa limite ne peut être qu'un entier. Mais ici, la limite de  $(p_{\phi(n)})$  est un irrationnel,  $qx$ . On a donc une contradiction.

---

### Correction de l'exercice 31 ▲

1. Soit  $(u_n)$  une suite convergente de limite  $l$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $n \geq n_0$ , on a

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Mais alors, pour tous  $p, q \geq n_0$ , on obtient

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que  $(u_n)$  est bien une suite de Cauchy.

2. On applique la définition d'une suite de Cauchy avec  $\varepsilon = 1$ . Alors on sait qu'il existe  $N \geq 1$  tel que, pour tout  $p, q \geq N$ , on a  $|u_p - u_q| \leq 1$ . En particulier, fixant  $q = N$ , on a pour  $p \geq N$

$$|u_p| \leq |u_N| + 1.$$

Il est alors clair que  $|u_n|$  est majoré par

$$\max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1).$$

Soit  $a$  la limite de la suite extraite  $(u_{\phi(n)})$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $(u_n)$  est une suite de Cauchy, il existe  $N \geq 1$  tel que, pour  $p, q \geq N$ , on a  $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$ . De plus, puisque  $(u_{\phi(n)})$  converge vers  $a$ , on sait qu'il existe un entier  $n$  tel que  $\phi(n) \geq N$  et  $|u_{\phi(n)} - a| \leq \varepsilon$ . Maintenant, si  $p \geq \phi(n)$ , alors

$$|u_p - a| = |u_p - u_{\phi(n)} + u_{\phi(n)} - a| \leq |u_p - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - a| \leq 2\varepsilon.$$



Ceci prouve que la suite  $(u_n)$  converge bien vers  $a$ . Il suffit désormais d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass...

3. On applique la définition d'une suite de Cauchy avec  $\varepsilon = 1$ . Alors on sait qu'il existe  $N \geq 1$  tel que, pour tout  $p, q \geq N$ , on a  $|u_p - u_q| \leq 1$ . En particulier, fixant  $q = N$ , on a pour  $p \geq N$

$$|u_p| \leq |u_N| + 1.$$

Il est alors clair que  $|u_n|$  est majoré par

$$\max(|u_0|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1).$$

4. Soit  $a$  la limite de la suite extraite  $(u_{\phi(n)})$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $(u_n)$  est une suite de Cauchy, il existe  $N \geq 1$  tel que, pour  $p, q \geq N$ , on a  $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$ . De plus, puisque  $(u_{\phi(n)})$  converge vers  $a$ , on sait qu'il existe un entier  $n$  tel que  $\phi(n) \geq N$  et  $|u_{\phi(n)} - a| \leq \varepsilon$ . Maintenant, si  $p \geq \phi(n)$ , alors

$$|u_p - a| = |u_p - u_{\phi(n)} + u_{\phi(n)} - a| \leq |u_p - u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)} - a| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que la suite  $(u_n)$  converge bien vers  $a$ .

5. Il suffit désormais d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass...

### Correction de l'exercice 32 ▲

1. Soit  $a < b$  deux valeurs d'adhérence de  $u_n$  et  $c \in ]a, b[$ . On va prouver que  $c$  est aussi une valeur d'adhérence de  $u$ . Pour cela, fixons  $\varepsilon > 0$ . Il suffit de prouver que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $p \geq N$  tel que  $u_p \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ . Pour cela, commençons par fixer  $n_0 \geq N$  tel que, si  $n \geq n_0$ , alors

$$|u_n - u_{n+1}| < \varepsilon.$$

Ce  $n_0$  étant fixé, on sait qu'il existe  $n_1 \geq n_0$  tel que  $u_{n_1} \in ]-\infty, c[$ , car  $a$  est valeur d'adhérence de  $u$ . Ensuite, on sait qu'il existe  $n_2 > n_1$  tel que  $u_{n_2} \in ]c, +\infty[$ , car  $b$  est valeur d'adhérence de  $u$ . Si  $u_{n_1} \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ , alors on a gagné. Sinon, on a forcément  $u_{n_1} \leq c - \varepsilon$ . Soit  $p = \min\{n > n_1; u_n \notin ]-\infty, c - \varepsilon]\}$ . Un tel entier  $p$  existe car  $u_{n_2} \notin ]-\infty, c - \varepsilon[$ . Mais alors, puisque  $p > n_1 \geq n_0$ , on sait que  $u_p - u_{p-1} < \varepsilon$ . Et de plus,  $u_{p-1} \leq c - \varepsilon$ . On en déduit que  $u_p \leq c$  et comme  $u_p > c - \varepsilon$ , on a bien construit  $p \geq N$  tel que  $u_p \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ .  $c$  est bien une valeur d'adhérence de la suite  $u$ .

2. Seul le sens réciproque pose problème. On va démontrer que  $(u_n)$  admet une unique valeur d'adhérence. D'abord, si  $(u_{\phi(n)})$  converge vers  $\ell$ , alors  $u_{\phi(n)+1} = f(u_{\phi(n)})$  converge vers  $f(\ell)$ . Mais comme  $u_{\phi(n)+1} - u_{\phi(n)}$  tend vers 0, si  $\ell$  est une valeur d'adhérence, on a  $\ell = f(\ell)$ . Supposons maintenant qu'il existe  $c < d$  deux valeurs d'adhérence de  $u$ . Alors, forcément, en suivant un raisonnement similaire à celui de la première question, il existe  $p$  tel que  $u_p \in ]c, d[$  et donc  $u_p$  est une valeur d'adhérence de  $u$ . On a ainsi  $f(u_p) = u_p$ , et donc  $u$  est stationnaire à partir du rang  $p$ , ce qui contredit qu'elle admet plusieurs valeurs d'adhérence. Ainsi,  $(u_n)$  est une suite bornée qui admet une seule valeur d'adhérence. Elle est donc convergente.

### Correction de l'exercice 33 ▲

1. La fonction cosinus réalisant une bijection décroissante de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ , il existe  $0 \leq u < v \leq \pi$  tels que  $\cos(v) = a - \varepsilon$  et  $\cos(u) = a$ . Par densité de  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe deux entiers (relatifs)  $p$  et  $q$  tels que  $u < p + 2\pi q < v$ . Prenons le cosinus. Nous trouvons  $a - \varepsilon < \cos(p) < a$ . Posons  $n = |p|$ . Alors  $\cos(n)$  répond aux contraintes données.

2. Imaginons qu'il en existe simplement un nombre fini,  $\cos(n_1), \dots, \cos(n_p)$  et posons  $b = \max(\cos(n_1), \dots, \cos(n_p))$ . Alors  $a - \varepsilon < b < a$ , et en reprenant la méthode de la question précédente, il existe  $n$  tel que  $\cos(n) \in ]b, a[$ . On a donc fabriqué un nouvel élément de la suite dans l'intervalle  $]a - \varepsilon, a[$ , une contradiction.

3. Le résultat de la question précédente nous dit que l'intervalle  $] - 1, 1]$  est contenu dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos(n))$ . On peut également démontrer que  $-1$  est une valeur d'adhérence, en reprenant le même raisonnement, mais à partir des intervalles du type  $] - 1, -1 + \varepsilon[$ . Comme  $(\cos(n))$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ , l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(\cos(n))$  est donc l'intervalle  $[-1, 1]$ .